Μαθημα 10ο — 3/11/2016

Πιθανοτητες

Συνεχης τ.μ. – Συναρτηση Πυκνοτητας Πιθανοτητας (σ.π.π)

Πρωτη προσεγγιση του ορισμου

Τ.μ. με υπεραριθμησιμο πληθος τιμων δηλ. με συνολο τιμων το $\mathbb{R}$ ή ενα $\subseteq \mathbb{R}$

Εστω X συνεχη τ.μ π.χ X = βαρος νεογεννητου

Τιμες της X : $x \in (0, \cancel{\infty})$

$x \in (1, 5)$

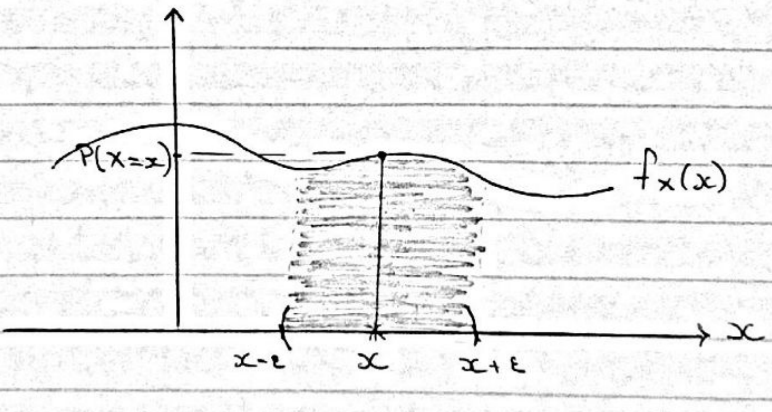
Εχει νοημα για μια συνεχη τ.μ. X να παρει μια συγκεκριμενη της τιμη? Εχει νοημα π.χ $P(X=3.5\ kg) = ?$

$P(X=3.5) = \frac{1}{\cancel{\infty}} = 0$, $P(3{,}5-\varepsilon \le X \le 3{,}5+\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$

Αν X συνεχης τ.μ. εχει νοημα να ενδιαφερθω για $P(x-\varepsilon \le X \le x+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ γυρω απο την τιμη x της X.

Πως θα υπολογισω πιθανοτητα διαστηματος;

π.χ $P(x-\varepsilon \le X \le x+\varepsilon) = ?$



Ορισμος

Εστω τ.μ X. Η X λεγεται συνεχης αν ∃ μια μη αρνητικη συναρτηση f_X ορισμενη στο $\mathbb{R}$ και τετοια ωστε

$$P(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx \quad , B \subseteq \mathbb{R}$$

Η f_X ονομαζεται σ.π.π και συμβολιζεται με f_X

Συνεπειες του ορισμου

① Εστω $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ με $a<b$

$$P(X\in B) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\cdot dx$$

② Εστω $B = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$

$$P(X\in B) = P(-\infty \le X \le x) = P(X \le x) \overset{op}{=} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Αρα $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad , t \in \mathbb{R}$

Απο γνωστο θεωρημα του ΑΠΕΙ ΙΙ η F_X συνεχους τ.μ. ειναι συνεχης συναρτηση

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = f_X(x)$$

③ Γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\cdot dt = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1$$

④ Αν η X συνεχής τ.μ, τότε η F_X συνεχής συνάρτηση και επομένως:

$$P(a<X<b) = P(a\le X<b) = P(a<X\le b) = P(a\le X<b)$$

$$F_X(b) - F_X(a) \qquad \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx$$

Ιδιότητες της σ.π.π

① f_X μη αρνητική
$f_X(x) \geq 0$, $x\in\mathbb{R}$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\, dt = 1$

Συνθήκες τις οποίες θα πρέπει να ικανοποιεί μια μη-αρνητική πραγματική συνάρτηση ώστε να είναι σ.π.π

Παραδειγμα

Χ τ.μ. με σ.π.π

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

α) $c = ;$ β) $F_X(x) = ;$ γ) $P(1 < X < 2)$

απαντηση

α) Επειδη η f_X ειναι σ.π.π ισχυει οτι:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} c \cdot e^{-x}\,dx = -c\int_{0}^{\infty} de^{-x} =$$

$$= -c\left[e^{-x}\right]_0^{\infty} = -c\left[\frac{1}{e^{x}}\right]_0^{\infty} = -c(0-1) = c$$

$\Rightarrow \quad c = 1$

(*) $\quad \frac{de^{-x}}{dx} = -e^{-x} \Rightarrow e^{-x}dx = -de^{-x}$

β) Για $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

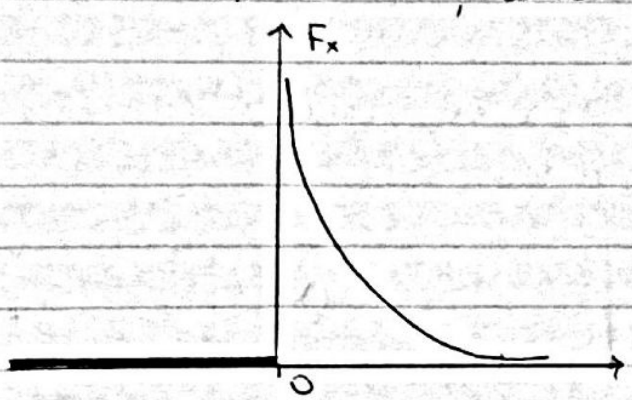
Για $x \geq 0$:

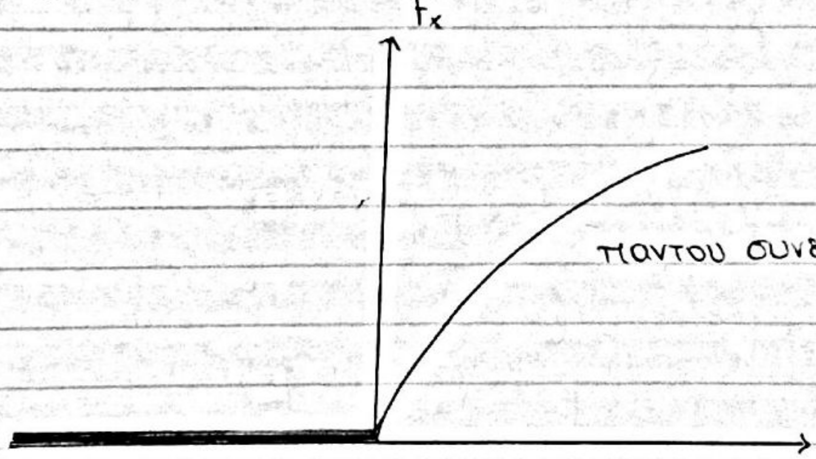
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt =$$

$$= 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^x = -\left(e^{-x} - 1\right) = 1 - e^{-x}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$





γ) $P(1 < X < 2)$

Μπορω να το υπολογισω με δυο τροπους

Α' τροπος

$F_X(2) - F_X(1) = (1-e^{-2}) - (1-e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$

Β' τροπος

$$\int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 e^{-x}\,dx = -\int_1^2 de^{-x} = -e^{-x}\Big|_1^2 = -e^{-2} + e^{-1}$$

Παραδειγμα

Η σ.π.π της τ.μ X ειναι

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \le x \le a \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}, \quad a > 0$$

α) $a = ;$ $F_X(x) = ;$ β) $P(0 < x < 1/2)$, $P(x \le 1/4)$

Απαντηση

α) $$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^a f_X(x)\,dx + \int_a^{\infty} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_0^a 2x\,dx + \int_a^{\infty} 0\,dx \Rightarrow \int_0^a 2x\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = 1 \Rightarrow a^2 - 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1$$

ομως επειδη $a > 0$, εχουμε $a = 1$

Συνεπώς

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$$

Αν $0 \le x < 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{x} = x^2$$

Αν $x > 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{1} f_X(t)\,dt + \int_{1}^{x} f_X(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 2\,\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{1} = 1$$

Ελεγχος

$$\frac{dF_x(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ 2x & , 0\le x\le 1 \\ 0 & , x>1 \end{cases} = \begin{cases} 2x & , 0\le x\le 1 \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases} = f_x(x)$$

β) $P(0 < X < 1/2) = \frac{1}{4}$

$$P(X \le 1/4) = \begin{cases} F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \dots \\ \int_{-\infty}^{1/4} f_x(x)\,dx = \dots = \frac{15}{16} \end{cases}$$

Ασκηση 3.9.1

Η σ.π της τ.μ Χ ειναι

$$P_x(x) = \begin{cases} a/5 & , x = 0, \pm 1, \pm 2 \\ 0 & , \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

α) $a = ;$ β) $F_x(x) = ;$ γ) $P(X \ge -1 \setminus X \le 1)$

Λυση

α) $\sum_{x=0,\pm1,\pm2} P_X(x) = 1 \Rightarrow 1 = P_X(X=0) + P_X(X=-1) + P_X(X=1) +$

$+ P_X(X=-2) + P_X(X=2) = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} = 5\cdot\frac{a}{5} = a \Rightarrow$

$a = 1$

β) $F_X(x) := P(X \le x)$

Αν $x < -2$: $F_X(x) := P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

Αν $-2 \le x < -1$: $F_X(x) := P(X \le x) = P(X = -2) = 1/5$

κ.ο.κ

Συνεπως εχουμε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/5, & -2 \le x < -1 \\ 2/5, & -1 \le x < 0 \\ 3/5, & 0 \le x < 1 \\ 4/5, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases}$$

γ) $$P(X \geq -1 \mid X \leq 1) = \frac{P(\{X \geq -1\} \cap \{X \leq 1\})}{P(X \leq 1)} =$$

$$= \frac{P(-1 \leq X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{P(X=-1, X=0, X=1)}{P(X=-2 \text{ ή } X=-1 \text{ ή } X=0 \text{ ή } X=1)} \overset{(A_3)}{=}$$

$$= \frac{P_X(-1) + P_X(0) + P_X(1)}{P_X(-2) + P_X(-1) + P_X(0) + P_X(1)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

Κεφαλαιο 4ο : Ειδικες διακριτες κατανομες

Ειδικες διακριτες τ.μ ή κατανομες

(1) Διωνυμικη κατανομη

Δοκιμη Bernoulli

Καθε τ.π με δυο δυνατα αποτελεσμα.

Ε (Επιτυχια) Α (Αποτυχια)

Θεωρω τ.π που

(Α1) Αποτελειται απο ενα προκαθορισμενο αριθμο n-επαναληψεων μιας στοιχειωδους διαδικασιας

(Δ_2) Σε καθε επαναληψη ∃ δυο δυνατα αποτελεσματα ή
Ε (επιτυχια) ή Α (αποτυχια)

Προκαθορισμενο αριθμο n-επαναληψεων Bernoulli
Σ' ενα διωνυμικο τ.π μας ενδιαφερει το πληθος των
Ε στις n-επαναληψεις. Θεωρω την τ.μ Χ που
παριστα τον αριθμο των Ε επαναληψεων
Τιμες X : $x = 0, 1, 2, \dots, n$
Αρα X διακριτη και πρεπει να βρω την σ.π
Αρκει να βρω την $p_X(x) = P(X=x)$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$

$$p_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=x) = P\begin{pmatrix}\text{ολα τα αποτελεσματα} \\ \text{με } x \text{ Ε και } (n-x) \text{ Α}\end{pmatrix} =$$

$$= P(\underbrace{EAEE\dots A}_{x \text{ E και } (n-x) \text{ A}}, \underbrace{AEEE\dots A, \dots}_{x \text{ E και } (n-x) \text{ A}}) =$$

$$= P(EAEE\dots A) + P(AEEE\dots A) + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ x, n-x \end{pmatrix} \underbrace{P(EAEE\dots A)}_{x \text{ E και } (n-x) \text{ A}}$$

(Δ_3) Θεωρω τις επαναληψεις ανεξαρτητες

$$p_X(x) = \binom{n}{x} \underbrace{P(EAEE\dots A)}_{x \text{ E και } (n-x) \text{ A}} \overset{(\Delta_3)}{=}$$

$$= \binom{n}{x} \underbrace{P(E)P(A)P(E)P(E)\dots P(A)}_{x \text{ E και } (n-x) \text{ A}}$$

Δ4) Η πιθανοτητα Ε παραμενει αμεταβλητη απο επαναληψη σε επαναληψη και ιση με p, δηλ.

$P(E) = p$, $P(A) = 1-p = q \overset{(\Delta 4)}{=} \binom{n}{x} [P(E)]^x \cdot [P(A)]^{n-x} =$

$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, με $x = 0, 1, \ldots, n$

και $0 < p < 1$, $0 < q < 1$

Ερωτηση

Ειναι η $p_x(x)$ σ.π;

Αρκει ① $p_x(x) \geq 0 \quad \forall x = 0, 1, 2, \ldots, n$

② $\sum_{x=0}^{n} p_x(x) = 1$

απαντηση

Η $p_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \geq 0 \quad \forall x = 0, 1, \ldots, n$

Αρα το ① ισχυει δηλ ειναι μη-αρνητικη.

$$\sum_{x=0}^{n} p_x(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \xlongequal[\text{Νευτωνα}]{\text{Διωνυμο}} [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

Αρα ισχυει και το ② δηλ $\sum_{x=0}^{n} p_x(x) = 1$

Συνεπως ειναι σ.π

Ορισμος

Η τ.μ Χ λεγεται διωνυμικη με παραμετρους n και p ($0 < p < 1$) αν οι δυνατες της τιμες ειναι $x = 0, 1, \ldots, n$ και η σ.π της:

$p_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

⊕ Καθε τυχαιο πειραμα που ικανοποιει τα Δ1) - Δ4) λεγεται διωνυμικο τυχαιο πειραμα